

R  : Σ une surface paramétrisée par $\sigma: \bar{A} \rightarrow \Sigma$,

$$\iint_{\Sigma} f \, ds = \iint_{\bar{A}} f(\sigma(u, v)) \cdot |\sigma_u \wedge \sigma_v| \, du \, dv$$

→ masse de Σ si sa densité est donnée par f
→ Flux de F à travers la surface Σ

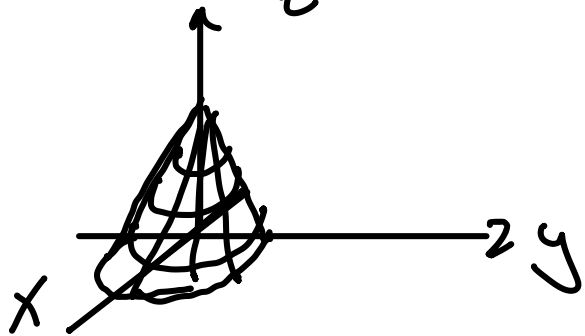
$$\iint_{\Sigma} F \cdot ds = \iint_{\bar{A}} \langle F(\sigma(u, v)); \sigma_u \wedge \sigma_v \rangle \, du \, dv.$$

→ signe dépend de la direction $\sigma_u \wedge \sigma_v$

Exemple 3.8 (i) $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4(x^2 + y^2) = (2 - z)^2, 0 \leq z \leq 2, x \geq 0\}$

$$f(x, y, z) = x \cdot y.$$

$$\sigma(\theta, z) = \left(\left(1 - \frac{z}{2}\right) \cos \theta, \left(1 - \frac{z}{2}\right) \sin \theta, z \right) \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], z \in [0, 2]$$



$$\sigma_\theta \wedge \sigma_z = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -(1-\frac{z}{2})\sin\theta & (1-\frac{z}{2})\cos\theta & 0 \\ -\frac{1}{2}\cos\theta & -\frac{1}{2}\sin\theta & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1-\frac{z}{2}) \cdot \cos\theta \\ (1-\frac{z}{2}) \cdot \sin\theta \\ \frac{1}{2}(1-\frac{z}{2}) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\sigma_\theta \wedge \sigma_z| = (1-\frac{z}{2}) \sqrt{\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{=1} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}(1-\frac{z}{2})\sqrt{5}$$

$$\int_1 \int f ds = \int_0^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{(1-\frac{z}{2})\cos\theta \cdot (1-\frac{z}{2})\sin\theta}_{f(\sigma(\theta, z))} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}(1-\frac{z}{2})\sqrt{5}}_{|\sigma_\theta \wedge \sigma_z|} d\theta dz$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta \underset{=0}{=} 0$$

$$\begin{aligned}
(i) \quad \Sigma_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4(x^2 + y^2) = (2-z)^2, \ 0 \leq z \leq 2, \ x \geq 0\} \\
\sigma(\theta, z) &= \left((1 - \frac{z}{2}) \cos \theta, (1 - \frac{z}{2}) \sin \theta, z \right) \quad \theta \in [-\pi/2, \pi/2], \ z \in [0, 2]. \\
\sigma_\theta \wedge \sigma_z &= \left((1 - \frac{z}{2}) \cos \theta, (1 - \frac{z}{2}) \sin \theta, \frac{1}{2} (1 - \frac{z}{2}) \right) \\
F(x, y, z) &= (y^2, x^2, z) \\
\iint_{\Sigma_1} F \cdot d\sigma \\
&= \int_0^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\langle \underbrace{\left((1 - \frac{z}{2})^2 \sin^2 \theta, (1 - \frac{z}{2})^2 \cos^2 \theta, z \right)}_{F(\sigma(\theta, z))}, \underbrace{\left((1 - \frac{z}{2}) \cos \theta, (1 - \frac{z}{2}) \sin \theta, \frac{1}{2} (1 - \frac{z}{2}) \right)}_{\sigma_\theta \wedge \sigma_z} \right\rangle \\
&= \dots = \frac{\pi + 1}{3}
\end{aligned}$$

Définition 3.9 : Domaine régulier de $\mathbb{R}^3$

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un ouvert borné. Ω est un domaine régulier

si $\exists \Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_m$ des ouverts tq

- $\forall 1 \leq j \leq m, \quad \overline{\Omega_j} \subseteq \Omega_0$

- $\forall 1 \leq i, j \leq m, \quad i \neq j \quad \Rightarrow \quad \overline{\Omega_j} \cap \overline{\Omega_i} = \emptyset$

- $\Omega = \Omega_0 \cup \left[\bigcup_{i=1}^m \overline{\Omega_i} \right]$

- $\forall 0 \leq i \leq m, \quad \partial \Omega_i = \Sigma_i$ est une surface régulière par morceaux orientable.

Théorème 3.10 : théorème de la divergence.

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un domaine régulier, $\nu : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de normales extérieures, unités, continu, et $F \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^3)$. Alors,

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} \langle F; \nu \rangle ds.$$

Remarque 3.11 $\rightarrow$ Série 7, ex 1.

$$\nu(\sigma(u, v)) = \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} \left| \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{|\sigma_u \wedge \sigma_v|} \right|$$

$\rightarrow$ normal à Σ qui est une partie du bord.

$\rightarrow$ normal unité

corrige le signe, si jamais $\frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{|\sigma_u \wedge \sigma_v|}$ pointe à l'intérieur

$$\iint_{\Sigma} \langle \vec{F}; \vec{\nu} \rangle dS = \iint_A \underbrace{\langle F(\sigma(u,v)); \pm \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{|\sigma_u \wedge \sigma_v|} \rangle}_{\langle \vec{F}; \vec{\nu} \rangle \text{ au point } \sigma(u,v)} \cdot \underbrace{|\sigma_u \wedge \sigma_v|}_{\text{"Jacobien"}} du dv$$

$\downarrow$
 Champ scalaire.

$$= \pm \iint_A \langle F(\sigma(u,v)); \sigma_u \wedge \sigma_v \rangle du dv$$

$$= \pm \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

$\begin{cases} \rightarrow + & \text{si } \sigma_u \wedge \sigma_v \text{ pointe vers l'extérieur} \\ \rightarrow - & \text{si } \sigma_u \wedge \sigma_v \text{ pointe vers l'intérieur.} \end{cases}$

Exemple 3.12

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + y^2}_{\substack{\uparrow \\ \text{cylindriques}}}} < 1, \text{ et } 0 < z < 1\}$$

$$F(x, y, z) = (x^2, 0, 0).$$

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = 2x$$

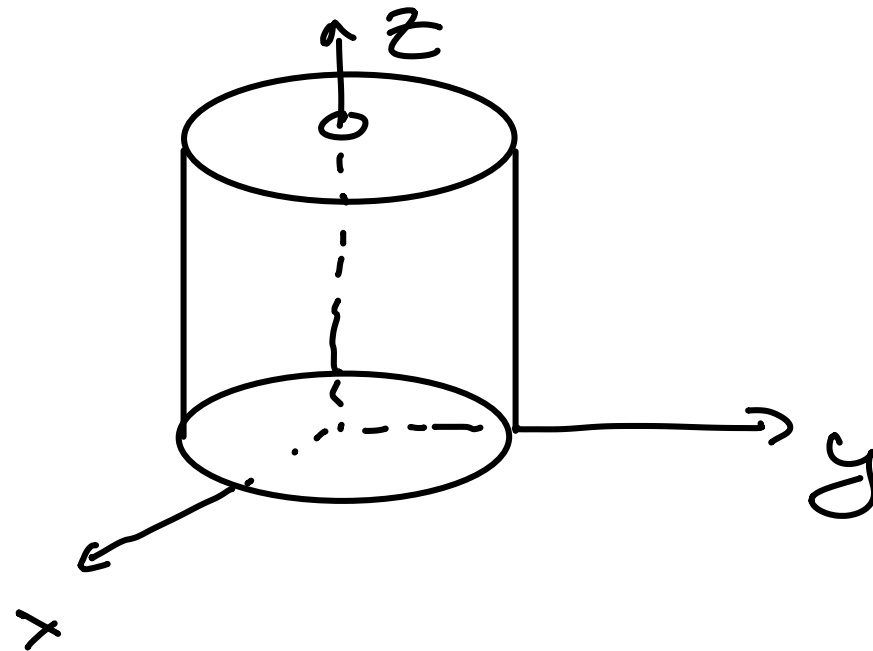
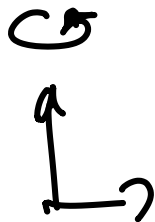
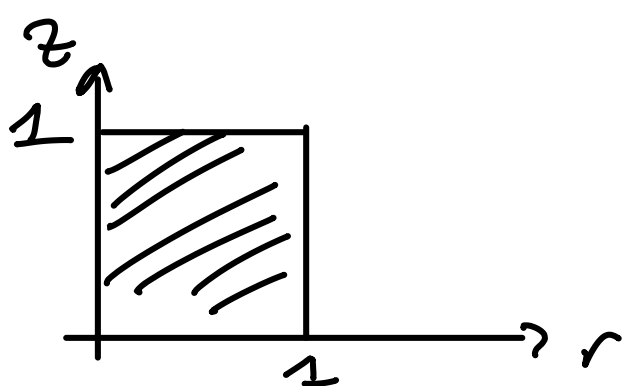
Choix de coordonnées: cylindriques. $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$,
 $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in \mathbb{R}$.

$$x^2 + y^2 < 1 \iff r^2 < 1 \iff r \in [0, 1[.$$

$$0 < z < 1 \iff z \in]0, 1[.$$

$$\phi(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z), \quad r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, 1]$$

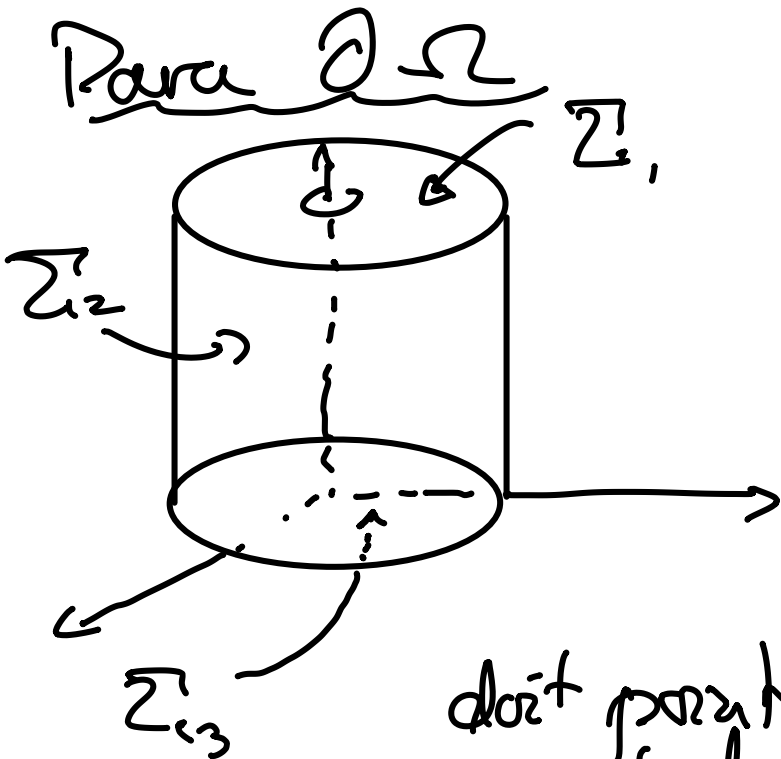
$$\rightarrow \text{Jacobien} = r$$



$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) dx dy dz =$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \underbrace{2r \cos \theta \cdot r}_{(\operatorname{div} \vec{F})(\phi(r, \theta, z))} d\theta dr dz = \left[\frac{2}{3} r^3 \right]_0^1 \left[-\sin \theta \right]_0^{2\pi} = 0$$

Jacobian.



$$\Sigma_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}$$

$$\sigma^1(r, \theta) = \varphi(r, \theta, 1) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 1)$$

$$r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi]$$

doit pointer vers le haut
 $\Rightarrow 3^{\text{e}} \text{ comp.} \geq 0$

$$\sigma_r^1 \wedge \sigma_\theta^1 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, r)$$

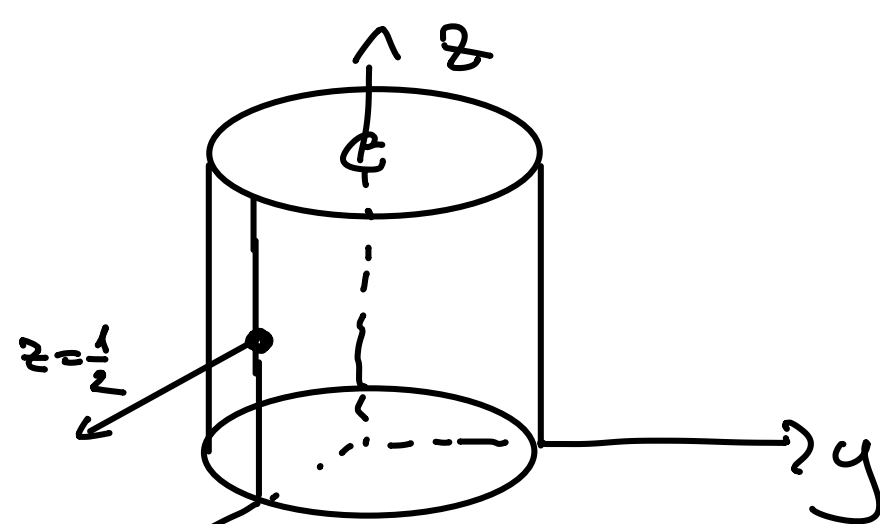
$\oplus$

$$\Rightarrow \text{ext. } 3^{\text{e}} \text{ comp.} \geq 0$$

$$\Sigma_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

$$\sigma^2(\theta, z) = \varphi(1, \theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z), \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, 1]$$

$$\sigma_\theta^2 \wedge \sigma_z^2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$$



On teste en $\theta = 0, z = \frac{1}{2}$,

$$\sigma^2(0, \frac{1}{2}) = (1, 0, \frac{1}{2})$$

④

$$\sigma_\theta^2 \wedge \sigma_z^2 = (1, 0, 0)$$

$\hookrightarrow$ 1^{ère} comp. ≥ 0

$\Rightarrow$ ext!

$\sigma_\theta^2 \wedge \sigma_z^2$ sur l'axe $x \Rightarrow$ 1^{ère} composante doit être positive

$$\Sigma_3 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$$

$$\sigma^3(r, \theta) = \varphi(r, \theta, 0) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0) \quad r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\sigma_r^3 \wedge \sigma_\theta^3 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, \underline{r}) \quad \text{intérieure!}$$



⑤

$$\iint_{\Sigma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \underbrace{\langle (r^2 \cos^2 \theta, 0, 0); (0, 0, r) \rangle}_{=0} dr d\theta = 0$$

↑
remark 3.11

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \langle (\cos^2 \theta, 0, 0); (\cos \theta, \sin \theta, 0) \rangle d\theta dz \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^3 \theta d\theta = \left[\frac{1}{12} \sin(3\theta) + \frac{3}{4} \sin \theta \right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^3 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} (e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}}{2} + 3 \cdot \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \cos(3\theta) + \frac{3}{4} \cos(\theta)$$

$$\Rightarrow \int \cos^3 \theta = \frac{1}{12} \sin(3\theta) + \frac{3}{4} \sin(\theta)$$

$$\iint_{\Sigma_3} F \cdot ds = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \langle (r^2 \cos^2 \theta, 0, 0); (0, 0, r) \rangle d\theta dr = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \iint_{\partial \Omega} \langle F; \nu \rangle ds &= \iint_{\Sigma_1} F \cdot ds + \iint_{\Sigma_2} F \cdot ds - \iint_{\Sigma_3} F \cdot ds \\ &= 0 + 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

Corollaire 3.13 Formules de volume

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un domaine régulier et $\nu: \partial \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de normales extérieures unités continu. Soit encore les champs $F(x, y, z) = (x, y, z)$, $G_1(x, y, z) = (x, 0, 0)$, $G_2(x, y, z) = (0, y, 0)$, $G_3(x, y, z) = (0, 0, z)$. Alors, $\text{Vol}(\Omega) = \frac{1}{3} \iint_{\partial \Omega} \langle F; \nu \rangle = \iint_{\partial \Omega} \langle G_1; \nu \rangle ds$

Corollaire 3.14: Identités de Green

Soient Ω, ν comme dans cor. 3.13, $f, g \in C^2(\bar{\Omega})$.

Alors

$$(i) \iiint_{\Omega} f \cdot \Delta g + \langle \nabla f; \nabla g \rangle dx dy dz = \iint_{\partial \Omega} \langle f \nabla g; \nu \rangle ds$$

$$(ii) \iiint_{\Omega} (f \Delta g - g \Delta f) dx dy dz = \iint_{\partial \Omega} \langle f \nabla g - g \nabla f; \nu \rangle ds$$

$$(iii) \iiint_{\Omega} \Delta f dx dy dz = \iint_{\partial \Omega} \langle \nabla f; \nu \rangle ds$$

div()



§ 3.3 Théorème de Stokes

Définition 3.15

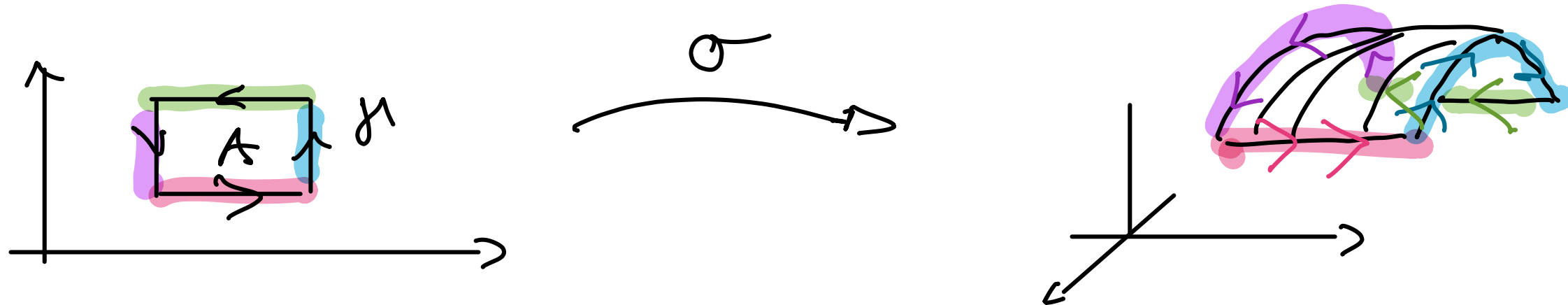
Soit $\Sigma_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ une surface régulière orientable, $\sigma: \bar{A} \rightarrow \Sigma_1$ une paramétrisation. (rappelons que ∂A est une courbe simple, fermée, régulière par morceaux)

Le bord de Σ_1 , noté $\partial \Sigma_1$, est donné par $\sigma(\partial A)$

dont on entend :

- Les courbes qui sont parcourues dans deux sens opposés
- Les parties qui se réduisent à un point.

Le choix d'un sens de parcours sur ∂A induit un sens de parcours sur $\partial \Sigma_1$ par composition avec σ



Si $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une paramétrisation (d'un bout) de ∂A , $\sigma \circ \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une paramétrisation (d'un bout) de $\partial \Sigma$, le sens de parcours de $\sigma \circ \gamma$ est appelé le sens de parcours induit par σ

Example 3.16

(i) $\Sigma_1 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z \in [0, 1] \}$

$\sigma(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, 1]$

